

# THERMISCHER EINLAUF IN AUSGEBILDETER LAMINARER ROHRSTRÖMUNG

U. GRIGULL und H. TRATZ

Institut für Technische Thermodynamik, Technische Hochschule München

(Eingegangen: 18 November 1964, in revidierter Auflage 21 Dezember 1964)

**Zusammenfassung**—Für konstante Wandtemperatur, konstante Wärmestromdichte und linear ansteigende Wandtemperatur wurden die Temperaturprofile als Funktion der Rohrlänge numerisch mit höherer Genauigkeit als bisher berechnet. Für einige der hieraus berechneten Nusseltzahlen wurden Näherungsgleichungen angegeben. Bei linear ansteigender Wandtemperatur durchläuft die Nusseltzahl ein Minimum.

## FORMELZEICHEN

- $a$ , Temperaturleitfähigkeit [ $a = \lambda/(\rho \cdot c_p)$ ];
- $c_p$ , spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck;
- $d$ , Rohrdurchmesser  $d = 2r_0$ ;
- $q_w$ , Wärmestromdichte an der Wand;
- $r$ , radiale Koordinate;
- $r_0$ , Rohrradius;
- $R$ ,  $r/r_0$ ;
- $w$ , Strömungsgeschwindigkeit;
- $w_m$ , mittlere Strömungsgeschwindigkeit;
- $W$ ,  $w/w_m$ ;
- $x$ , achsiale Koordinate;
- $X$ ,  $x/r_0$ ;
- $Z$ ,  $10^3 x/(d \cdot Pe)$ ;
- $\alpha$ , Wärmeübergangskoeffizient;
- $\eta$ , Viskosität;
- $\vartheta$ , Temperatur;
- $\vartheta_a$ , Temperatur in der Rohrachse;
- $\vartheta_M$ , Mischtemperatur;
- $\vartheta_w$ , Wandtemperatur;
- $\vartheta_0$ , Anfangstemperatur für  $x \leq 0$ ;
- $\theta$ ,  $(\vartheta - \vartheta_w)/(\vartheta_0 - \vartheta_w)$ ;
- $\theta_a$ ,  $(\vartheta_w - \vartheta)/(\vartheta_w - \vartheta_a)_\infty$ ;
- $\theta_0$ ,  $(\vartheta_w - \vartheta_0)/(\vartheta_w - \vartheta_a)_\infty$ ;
- $\lambda$ , Wärmeleitfähigkeit;
- $\nu$ , kinematische Viskosität ( $\nu = \eta/\rho$ );
- $\rho$ , Dichte;
- $Nu = \alpha d/\lambda$ , Nusselt-Zahl;
- $Pe = w_m d/a$ , Péclet-Zahl.

strömung unterhalb der Stelle, an der die thermische Einwirkung beginnt.

Dieser thermische Einlauf kann mit dem hydrodynamischen Einlauf, also der Entwicklung des Geschwindigkeitsprofils, räumlich zusammenfallen, er kann sich auch in hydrodynamisch ausgebildeter Strömung abspielen. Dieser letztere Fall wird im folgenden betrachtet.

Setzt man voraus, dass die Stoffgrößen nicht von der Temperatur abhängen und dass Wärmeleitung in Strömungsrichtung ebenso wie die Reibungswärme zu vernachlässigen sind, so lautet die Differentialgleichung der Temperatur  $\vartheta$  bei laminarer Rohrströmung in dimensionslosen Koordinaten  $X = x/r_0$  und  $R = r/r_0$  wie folgt [1]

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \vartheta}{\partial R} = \frac{w_m r_0}{a} W \frac{\partial \vartheta}{\partial X} \quad (1)$$

Hierin ist  $w_m$  die mittlere Strömungsgeschwindigkeit,  $r_0$  der Rohrradius und  $W = w/w_m$  die dimensionslose Geschwindigkeit.

In ausgebildeter laminarer Rohrströmung ist die Geschwindigkeit nach Hagen und Poiseuille parabolisch über den Querschnitt verteilt gemäss der Gleichung

$$W = 2(1 - R^2) \quad (2)$$

Setzt man diese Beziehung in Gl. (1) ein und führt ferner die Abkürzung

$$w_m r_0/a = Pe/2$$

UNTER thermischem Einlauf versteht man die Entwicklung des Temperaturprofiles einer Kanal-

ein, so erhält man die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \vartheta}{\partial R} = Pe(1 - R^2) \frac{\partial \vartheta}{\partial X} \quad (3)$$

Die thermische Einwirkung auf die hydrodynamisch ausgebildete Strömung soll an der Stelle  $x = 0$  beginnen, so dass die Anfangsbedingung lautet:

$$\vartheta = \vartheta_0 = \text{const} \quad \text{für } X \leq 0 \text{ und } 0 \leq R < 1$$

da die Flüssigkeit oberhalb des Beginns der thermischen Einwirkung gleichmässig temperiert ist.

Bei der Randbedingung für  $X \geq 0$  und  $R = 1$  lassen sich 3 Fälle gemäss folgender Zusammenstellung unterscheiden:

Randbedingung I  $\vartheta_w = \text{const}$

Randbedingung II  $q_w = -\lambda (d\vartheta/dR)_w = \text{const}$

Randbedingung III  $d\vartheta_w/dX = \text{const}$

Hierin bezeichnet der Index  $w$  die Wand, also die Stelle  $R = 1$ . Randbedingung I, die konstante Wandtemperatur, entspricht einem sehr hohen Wärmeübergangskoeffizienten ausserhalb des Rohres, wie er z.B. in siedenden oder kondensierenden Medien erreichbar wäre. Dieser Fall wird auch Graetz-Nusselt-Problem genannt [6, 7]. Randbedingung II, konstante Wärmestromdichte an der Wand, lässt sich mit elektrischer oder nuklearer Beheizung erreichen und spielt daher besonders bei thermischen Reaktorproblemen eine Rolle. Randbedingung III, die linear mit der Rohrlänge ansteigende Wandtemperatur, hat vorwiegend theoretisches Interesse, Sie kann beim Gegenstromwärmeaustauscher verwirklicht sein.

Für einige der vorstehend genannten Einlaufprobleme liegen bereits numerische Lösungen vor [6] bis [10]. Da zur Auswertung eigener Versuche über den Wärmeübergang in laminarer Rohrströmung die genaue Länge des thermischen Einlaufs benötigt wurde, wurden diese Profile und die Wärmeübergangskoeffizienten für alle 3 Randbedingungen erneut mittels elektronischer Rechenautomaten berechnet. Die benutzte Methode und die Ergebnisse sind im folgenden mitgeteilt.

#### DIFFERENZENGLEICHUNGEN

Zur numerischen Integration der Differentialgleichung (3) wurde diese in eine Differenzengleichung [2] verwandelt. Für die zweite Ableitung ( $\partial^2 \vartheta / \partial R^2$ ) erhält man

$$\frac{\Delta^2 \vartheta}{\Delta R^2} = \frac{\vartheta_{R+\Delta R}^X - 2\vartheta_R^X + \vartheta_{R-\Delta R}^X}{\Delta R^2} \quad (4)$$

wenn der Index die radiale Koordinate ( $R$ ) und der Exponent die achsiale Koordinate ( $X$ ) bedeuten.

Für die erste Ableitung ( $\partial \vartheta / \partial R$ ) wird der zentrale Differenzenquotient

$$\frac{\Delta \vartheta}{\Delta R} = \frac{\vartheta_{R+\Delta R}^X - \vartheta_{R-\Delta R}^X}{2\Delta R} \quad (5)$$

und für ( $\partial \vartheta / \partial X$ ) der vordere Differenzenquotient

$$\frac{\Delta \vartheta}{\Delta X} = \frac{\vartheta_{R+\Delta X}^X - \vartheta_R^X}{\Delta X} \quad (6)$$

eingeführt. Obwohl der zentrale Differenzenquotient genauer ist, wurde hier der vordere gewählt, der hinsichtlich der Fehlerfortpflanzung geeigneter ist [3]. Damit lässt sich Gl. (3) in folgender Form als Differenzengleichung schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta_{R+\Delta R}^X - 2\vartheta_R^X + \vartheta_{R-\Delta R}^X}{\Delta R^2} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\vartheta_{R+\Delta R}^X - \vartheta_{R-\Delta R}^X}{2\Delta R} \\ = Pe(1 - R^2) \frac{\vartheta_{R+\Delta X}^X - \vartheta_R^X}{\Delta X} \quad (7) \end{aligned}$$

Löst man Gl. (7) nach  $\vartheta_{R+\Delta X}^X$  auf, so erhält man eine lineare Beziehung zwischen den Temperaturen an der Stelle  $X + \Delta X$  und denen an der Stelle  $X$ :

$$\vartheta_{R+\Delta X}^X = f_1 \vartheta_{R+\Delta R}^X + f_2 \vartheta_R^X + f_3 \vartheta_{R-\Delta R}^X \quad (8)$$

Hierzu haben die Funktionen  $f$  folgende Bedeutung

$$f_1 = \frac{\Delta X}{\Delta R \cdot Pe(1 - R^2)} \left( \frac{1}{\Delta R} + \frac{1}{2R} \right) \quad (9)$$

$$f_2 = 1 - \frac{2\Delta X}{\Delta R^2 \cdot Pe(1 - R^2)} \quad (10)$$

$$f_3 = \frac{\Delta X}{\Delta R \cdot Pe(1 - R^2)} \left( \frac{1}{\Delta R} - \frac{1}{2R} \right) \quad (11)$$

Sind die Temperaturen an der Stelle  $X$  bekannt, so können mit Hilfe von Gl. (8) die Temperaturen an der Stelle  $X + \Delta X$  berechnet werden.

**ANWENDUNG DES DIFFERENZENVERFAHRENS**

Die Schrittweiten  $\Delta R$  und  $\Delta X$  können nicht unabhängig voneinander gewählt werden. Wegen der Stabilität der Lösung muss die Bedingung

$$0 \leq f_2 < 1$$

gelten [4, 5]. Das grösstmögliche  $\Delta X$  erhält man mit  $f_2 = 0$  aus Gl. (10)

$$\Delta X = \Delta R^2 \cdot Pe \frac{1 - R^2}{2} \tag{12}$$

Damit dieser Wert im ganzen Bereich nicht überschritten wird, setzen wir in Gl. (12)  $R = 1 - \Delta R$ , da an der Wand ( $R = 1$ ) die Temperatur durch die Randbedingung vorge-schrieben ist. Damit erhalten wir

$$\Delta X = \Delta R^3 \cdot Pe \frac{2 - \Delta R}{2} \tag{13}$$

Aus dieser Gleichung lässt sich für ein gewähltes  $\Delta R$  das noch zulässige  $\Delta X$  berechnen. Damit lassen sich auch die Funktionen  $f_1$  bis  $f_3$  nach Gl. (9) bis (11) für jeden Wert  $R$  angeben, mit deren Hilfe das Temperaturfeld nach Gl. (8) schrittweise berechnet werden kann. Am Beginn der thermischen Einwirkung ( $X = 0$ ) ist gemäss der Anfangsbedingung

$$\vartheta_{R+\Delta R} = \vartheta_R = \vartheta_{R-\Delta R} = \vartheta_0$$

Damit wird z.B. die Temperatur an der Stelle  $\Delta X$ :

$$\vartheta_R^{\Delta X} = \vartheta_0 (f_1 + f_2 + f_3)$$

Ausser dem Temperaturprofil interessiert vor allem der örtliche Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha$ , der sich aus dem Wandgradienten durch die Beziehung

$$\alpha = \frac{\lambda [(\partial\vartheta/\partial r)_w]}{\vartheta_w - \vartheta_M} = \frac{\lambda/r_0 [(\partial\vartheta/\partial R)_w]}{\vartheta_w - \vartheta_M} \tag{14}$$

berechnen lässt. Hierin ist  $\vartheta_M$  die Mischtempera-tur, im allgemeinen Falle durch die Gleichung

$$\vartheta_M = \frac{\int_F \rho \cdot c_p \cdot \vartheta \cdot w \cdot dF}{\int_F \rho \cdot c_p \cdot w \cdot dF} \tag{15}$$

definiert, in der  $F$  den durchströmten Quer-schnitt bedeutet.  $\vartheta_M$  stellt sich in einem adiabaten Mischungskalorimeter ein, das dem betrachtetem Querschnitt nachgeschaltet ist. Beim Kreisrohr und im Falle konstanter Stoffgrössen erhält man

$$\vartheta_M = 2 \int_0^1 \vartheta \cdot W \cdot R \cdot dR \tag{16}$$

Dieses Integral kann nach der Methode von Simpson numerisch berechnet werden.

Zur Berechnung des Temperaturgradienten  $(\partial\vartheta/\partial R)_w$  wurde der Temperaturlauf in Wand-nähe durch eine Parabel angenähert, die die Temperaturen an der Wand und an den Stellen  $R = 1 - \Delta R$  und  $R = 1 - 2\Delta R$  enthält und die Form

$$\vartheta_R = a + b(1 - R) + c(1 - R)^2$$

hat.

Die Konstanten  $a$ ,  $b$  und  $c$  können aus den Koordinaten der drei angegebenen Punkte be-rechnet werden. Aus der obigen Parabel-gleichung erhält man für den Wandgradienten der Temperatur den Ausdruck

$$\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial R}\right)_w = -b$$

oder, wenn die Konstante  $b$  nach dem angege-benen Verfahren berechnet wird

$$\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial R}\right)_w = \frac{-1}{2\Delta R} (4\vartheta_{R=1-\Delta R}^X - 3\vartheta_w^X - \vartheta_{R=1-2\Delta R}^X) \tag{17}$$

Aus den Gl. (16) und (17) kann man auch die örtliche Nusseltzahl gemäss der Gleichung

$$Nu = \frac{\alpha d}{\lambda} = \frac{2 [(\partial\vartheta/\partial R)_w]}{\vartheta_w - \vartheta_M} \tag{18}$$

berechnen, in der  $d = 2r_0$  den Rohrradius bedeutet. Sie ist also im wesentlichen der Quotient aus dem lokalen Wandgradienten und der lokalen Differenz zwischen Mischtemperatur und Wandtemperatur.

Alle Rechnungen wurden auf einem Digital-rechner Siemens 2002\* durchgeführt. Für die

\* Die Verfasser danken den Siemens-Schuckert-Werken, Erlangen, für die zur Verfügung gestellte Rechenzeit.

Temperaturprofile wurde der Rohrradius in 50 Teile zerlegt, also  $R = 0,02$  gewählt. Im folgenden werden die Ergebnisse der Rechnung mitgeteilt.

**KONSTANTE WANDTEMPERATUR**  
(Graetz-Nusselt-Problem)

Den Temperaturverlauf als Funktion von Radius und Rohrlänge nach einer sprunghaften Änderung der Wandtemperatur in ausgebildeter laminarer Rohrströmung (Graetz-Nusselt-Problem) zeigt Abb. 1 in perspektivischer Darstellung.

Hierin sind folgende dimensionslose Koordinaten gewählt

$$\text{Temperatur } \theta = (\vartheta - \vartheta_w) / (\vartheta_0 - \vartheta_w)$$

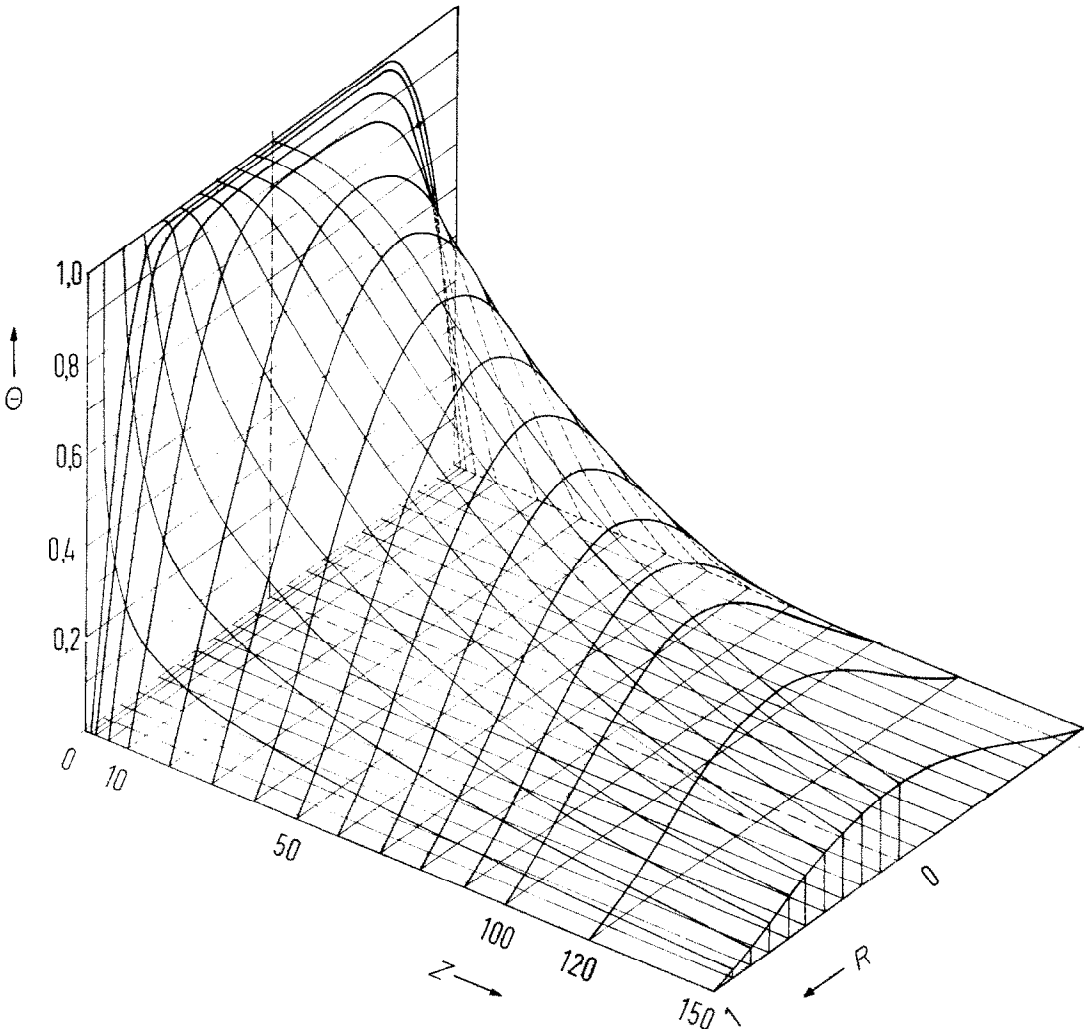
$$\text{Radius } R = r/r_0$$

$$\text{Rohrlänge } Z = 10^3 x / (d \cdot Pe)$$

Es ist also die lokale Über- oder Untertemperatur gegenüber der Wand  $(\vartheta - \vartheta_w)$  auf den Temperatursprung der Wandtemperatur

$$(\vartheta_0 - \vartheta_w)$$

an der Stelle  $x = Z = 0$  bezogen. Die beiden



**ABB. 1.** Thermischer Einlauf bei  $\vartheta_w = \text{const}$  (Graetz-Nusselt-Problem) Perspektivische Darstellung des Temperaturfeldes.

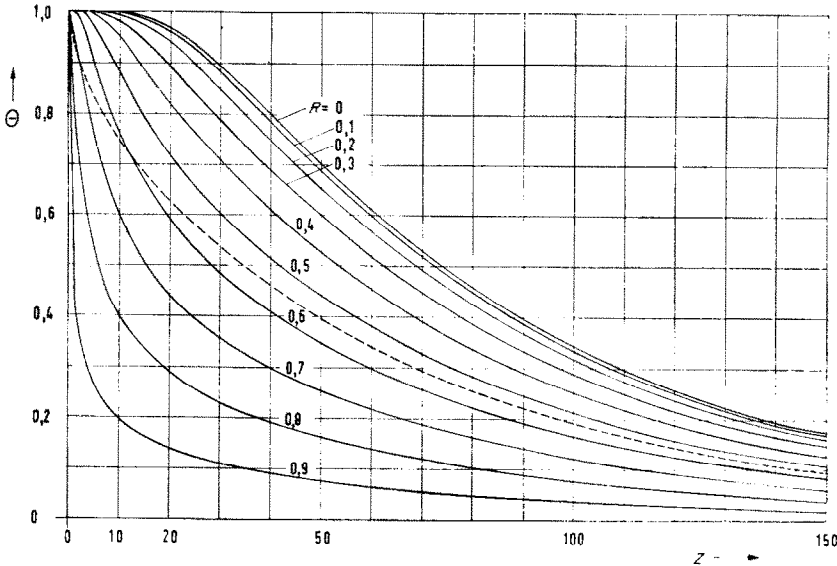


ABB. 2. Graetz-Nusselt-Problem. Schnitt durch das Temperaturfeld in Achsrichtung. Die gestrichelte Kurve bedeutet die lokale Mischtemperatur.

senkrechten Schnitte durch das Temperaturfeld sind in Abb. 2 und Abb. 3 wiedergegeben. Man erkennt den Abbau des zunächst rechteckigen Temperaturprofils von Rande des Feldes her. In Abb. 2 ist auch die lokale Mischtemperatur als Funktion der Rohrlänge als gestrichelte Kurve

eingetragen und zwar in der Form  $(\vartheta_M - \vartheta_w)/(\vartheta_0 - \vartheta_w)$ , wobei  $\vartheta_M$  nach Gl. (16) definiert ist.

Die lokale Nusselt-Zahl als Funktion der Rohrlänge, definiert nach Gl. (18), ist in Abb. 4 dargestellt. Sie strebt dem konstanten Endwert

$$Nu_\infty = 3,655 \approx 3,66$$

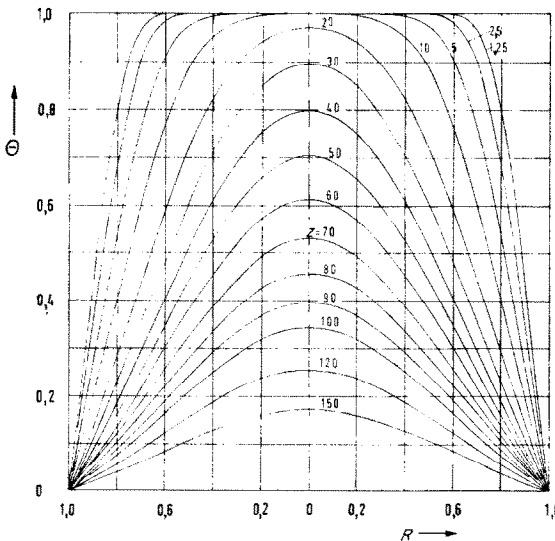


ABB. 3. Graetz-Nusselt-Problem. Schnitt durch das Temperaturfeld in radialer Richtung.

zu. Ausserdem ist die mittlere Nusselt-Zahl  $Nu_m$  zwischen  $x = 0$  und  $x$  eingetragen. Diese ist im wesentlichen der Quotient aus der bis zur Stelle  $x$  übertragenen Wärme und dem logarithmischen Mittel der Differenz zwischen Misch- und Wandtemperatur\*

$$\Delta\vartheta_{\log} = \frac{\vartheta_0 - \vartheta_M}{\ln [\vartheta_0 - \vartheta_w / \vartheta_M - \vartheta_w]}$$

Danach gilt

$$Nu_m = \frac{Pe}{2X} \cdot \frac{\vartheta_0 - \vartheta_M}{\Delta\vartheta_{\log}} = \frac{d \cdot Pe}{4x} \ln \frac{\vartheta_0 - \vartheta_w}{\vartheta_M - \vartheta_w} \quad (19)$$

Hier wie überall bedeutet  $\vartheta_M$  die örtliche Mischtemperatur. Die so definierte mittlere Nusselt-

\* Beim Vergleich mit anderen Arbeiten ist zu beachten, dass der Wärmeübergangskoeffizient auch mit dem linearen Mittelwert  $(\vartheta_0 + \vartheta_M - 2\vartheta_w)/2$  oder mit dem Temperatursprung  $(\vartheta_0 - \vartheta_w)$  gebildet werden kann.

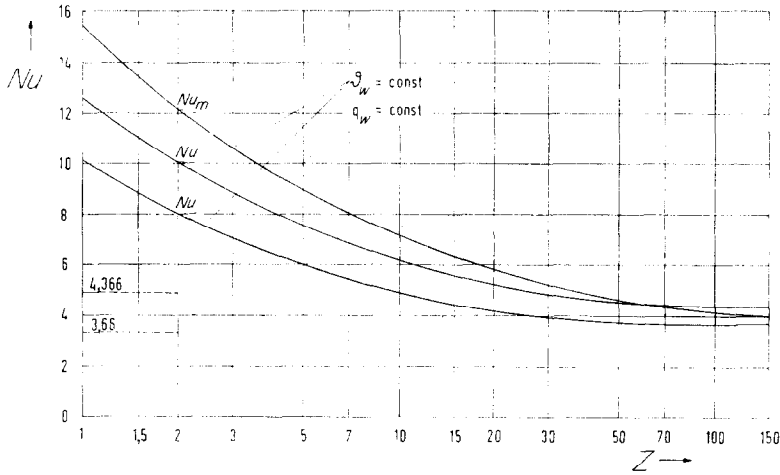


ABB. 4. Lokale und mittlere Nusselt-Zahlen bei  $\vartheta_w = \text{const}$  und  $q_w = \text{const}$ .

Zahl strebt dem Endwert 3,66 sehr viel langsamer zu, als die lokale Nusselt-Zahl. Selbst bei  $Z = 100$  hat sie noch den Wert 4,15 und ist damit um 13 Prozent höher als der Endwert.

Unsere Werte für die lokale Nusselt-Zahl stimmen mit denen von Lipkis [2] überein, die aus einer verbesserten Gleichung von Graetz berechnet wurden. Wie bereits Lipkis zeigte, liefert die Näherungslösung von Lévêque, die für den Beginn des thermischen Einlaufs abgeleitet wurde, schon für  $Z = 1$  zu hohe Nusselt-Zahlen.

**KONSTANTE WÄRMESTROMDICHTE**

Herrscht von der Stelle  $x = 0$  ab an der Rohrwand die konstante Wärmestromdichte  $q_w$ , so steigt unter den gemachten Voraussetzungen (temperaturunabhängige Stoffgrößen, keine Längswärmeleitung) die Mischtemperatur der Flüssigkeit linear mit der Rohrlänge an gemäss der Beziehung

$$\vartheta_M = 2q_w \frac{dX}{\lambda \cdot Pe} \tag{20}$$

Da dieser Ausdruck mit der aus Gl. (16) berechneten Mischtemperatur übereinstimmen muss, eignet er sich zur Berechnung der Wandtemperatur und zwar nach folgendem Verfahren: Bei der Berechnung der Temperatur  $\vartheta^X$  aus den Temperaturen  $\vartheta^{X-\Delta X}$  wird das zunächst

angenommene  $\vartheta_w^{X-\Delta X}$  so geändert, dass  $\vartheta_M^X$  nach Gl. (16) gleich jenem nach Gl. (20) wird. Damit hat man die richtige Wandtemperatur  $\vartheta_w^{X-\Delta X}$  und alle übrigen Temperaturen  $\vartheta^X$  ermittelt. Wegen des linearen Zusammenhangs zwischen  $\vartheta_M^X$  und  $\vartheta_w^{X-\Delta X}$  bei der Anwendung der Methode von Simpson genügt ein Iterationsschritt.

Nach einer hinreichend langen Rohrstrecke ist das Temperaturfeld ausgebildet, d.h. nicht nur die Mischtemperatur, sondern die Temperaturen auf allen Radien einschliesslich der Wandtemperatur ändern sich linear mit der Rohrlänge. In diesem Bereich hängt die rechte Seite von Gl. (3) nur von  $R$  ab, so dass aus der partiellen eine gewöhnliche Differentialgleichung wird, die sich leicht lösen lässt [11, 1]. Zwischen Wärmestromdichte und Temperaturanstieg besteht die Beziehung

$$\frac{d\vartheta}{dX} = \frac{2q_w d}{\lambda \cdot Pe} \tag{21}$$

Bei ausgebildetem Temperaturprofil, also im Grenzfall für  $x = \infty$ , beträgt die Differenz zwischen Wandtemperatur  $\vartheta_w$  und Temperatur in der Rohrachse  $\vartheta_a$

$$(\vartheta_w - \vartheta_a)_\infty = \frac{3q_w d}{8\lambda} \tag{22}$$

Dieser Ausdruck kann aus gegebenen Grössen berechnet werden und eignet sich daher als Bezugstemperatur bei der Darstellung der

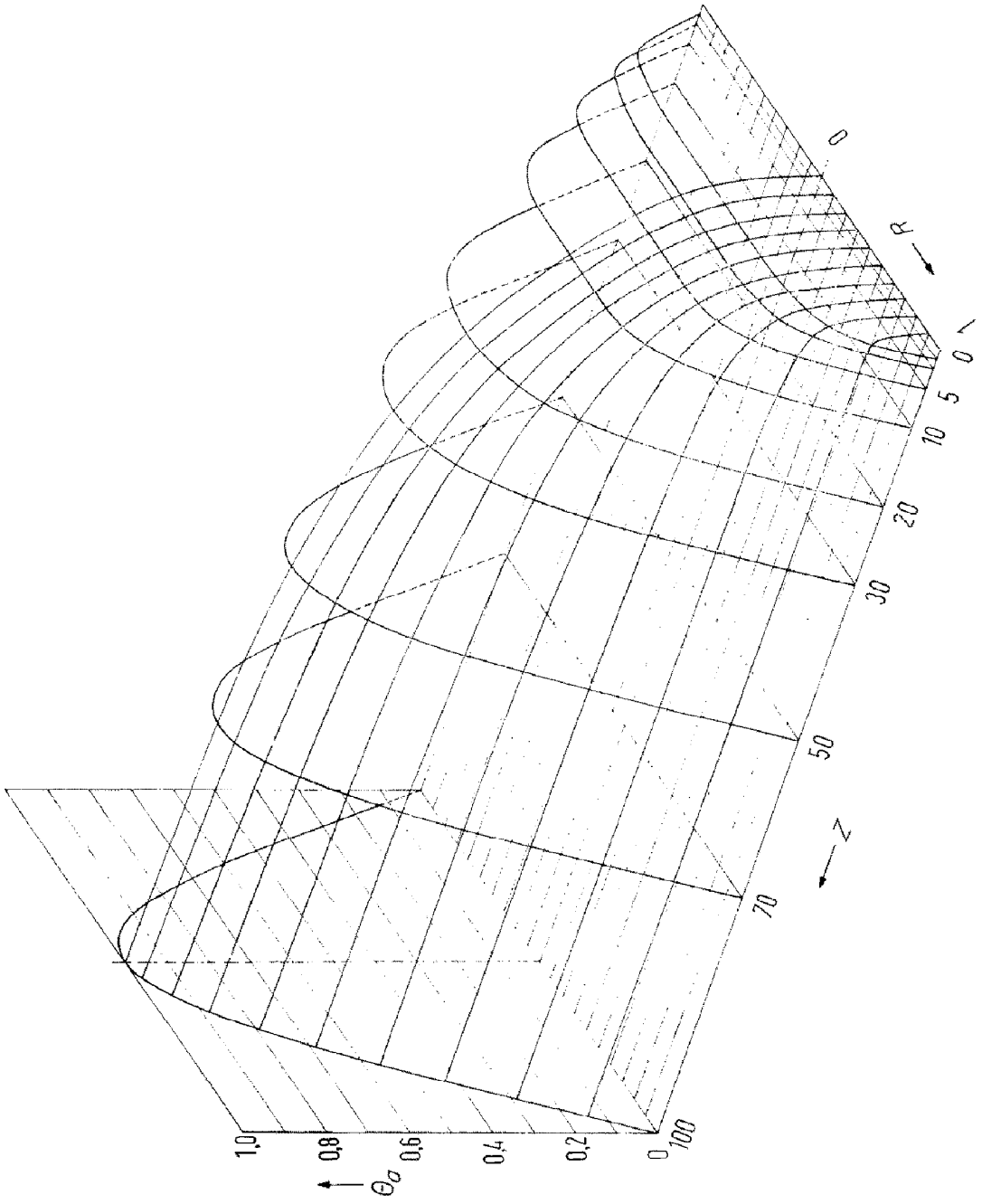


Abb. 5. Thermischer Einlauf bei  $q_w = \text{const.}$  Perspektivische Darstellung des Temperaturfeldes.

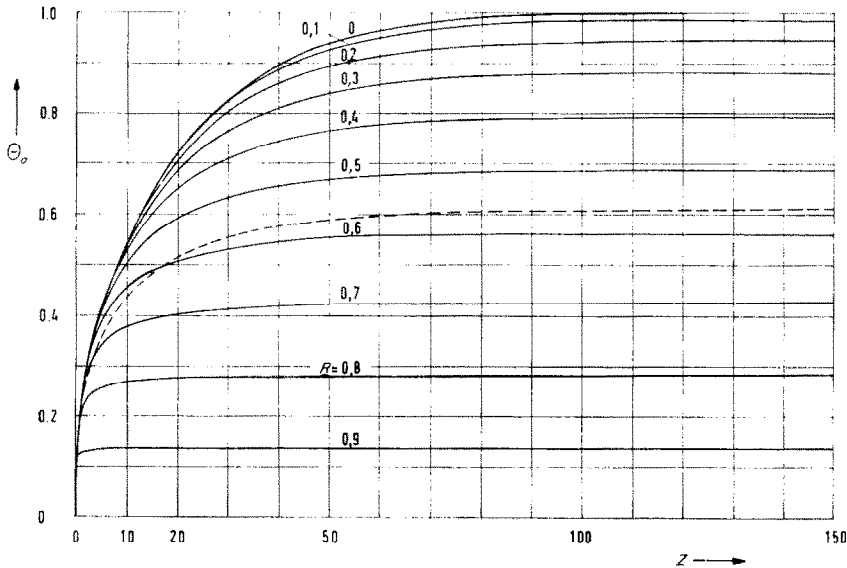


ABB. 6.  $q_w = \text{const.}$  Schnitt durch das Temperaturfeld in Achsrichtung. Die gestrichelte Kurve bedeutet die lokale Mischtemperatur.

örtlichen Temperatur. In Abb. 5 ist das Temperaturfeld perspektivisch, in Abb. 6 und 7 in zwei senkrechten Schnitten dargestellt unter Verwendung folgender dimensionsloser Koordinaten:

Temperatur  $\theta_a = (\vartheta_w - \vartheta) / (\vartheta_w - \vartheta_a)_\infty$

Radius  $R = r/r_0$

Rohrlänge  $Z = 10^3 x / (d \cdot Pe)$

Wegen der vorgeschriebenen Wärmestromdichte  $q_w$  und damit des Wandgradienten unterscheiden sich die Profile wesentlich von denen der Abb. 1 bis 3 mit  $\vartheta_w = \text{const.}$  Das Profil ist etwa bei  $Z = 100$  ausreichend genau ausgebildet, wie man aus Abb. 6 und 7 erkennt. In Abb. 6 ist noch der Verlauf der Mischtemperatur  $\vartheta_M$  in der Form  $(\vartheta_w - \vartheta_M) / (\vartheta_w - \vartheta_a)_\infty$  als gestrichelte Kurve eingetragen. Ihr Endwert errechnet sich aus dem ausgebildeten Temperaturprofil zu  $11/18 = 0,611$ .

Aus diesem Profil kann man auch den Endwert der Nusselt-Zahl zu  $Nu_\infty = 48/11 = 4,364$  berechnen [11, 1]. Die örtliche Nusselt-Zahl ist in Abb. 4 als Funktion der Rohrlänge dargestellt. Da bei der Randbedingung  $q_w = \text{const}$  der auf der Rohrlänge  $x$  übertragene Wärme-

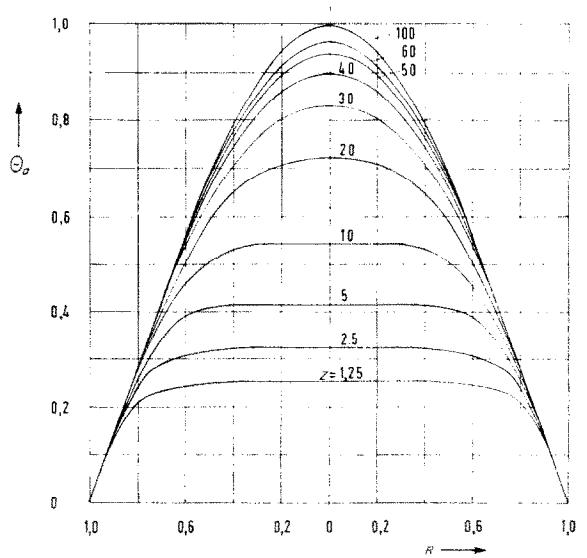


ABB. 7.  $q_w = \text{const.}$  Schnitt durch das Temperaturfeld in radialer Richtung.

strom durch  $q_w \cdot \pi \cdot d \cdot x$  gegeben ist, besteht kein Bedürfnis nach einer mittleren Nusselt-Zahl, denn auch der Verlauf der Mischtemperatur kann aus Gl. (20) einfach berechnet werden.



WANDTEMPERATUR LINEAR VERÄNDERLICH

Eine linear mit der Rohrlänge veränderliche Wandtemperatur führt in thermisch ausgebildeter Strömung auf das gleiche Temperaturprofil wie die konstante Wärmestromdichte  $q_w$ . Infolgedessen hat auch die Nusselt-Zahl den Endwert  $Nu_\infty = 4,364$ . Im Gebiet des thermischen Einlaufs unterscheiden sich die beiden Fälle.

Die linear veränderliche Wandtemperatur ( $d\vartheta_w/dx = \text{const}$ ) kann an der Stelle  $x = 0$  mit der dort herrschenden Wandtemperatur übereinstimmen (für  $x < 0$  gilt  $\vartheta = \vartheta_M = \vartheta_w = \vartheta_0$ ), oder es kann bei  $x = 0$  ausserdem ein Temperatursprung an der Wand  $(\vartheta_w - \vartheta_0)_0$  herrschen. Zur Kennzeichnung derartiger Fälle führen wir das Temperaturverhältnis

$$\theta_0 = (\vartheta_w - \vartheta_0)_0 / (\vartheta_w - \vartheta_a)_\infty$$

ein, in welchem der Sprung der Wandtemperatur auf die im voraus berechenbare Temperaturdifferenz bezogen ist. Hierzu dient die aus Gl. (21) und (22) folgende Beziehung

$$(\vartheta_w - \vartheta_a)_\infty = \frac{3 Pe}{16} \frac{d\vartheta_w}{dX} \quad (23)$$

Mit  $\theta_0$  als Parameter ist in Abb. 8 die örtliche Nusselt-Zahl für die Randbedingung  $d\vartheta_w/dx = \text{const}$  als Funktion der Rohrlänge dargestellt. Dabei zeigt sich deutlich der Einfluss des Temperatursprungs bei  $x = 0$ . Bei einem kleinen Sprung ( $0 < \theta_0 < 1$ ) erreicht die Nusselt-Zahl monoton den Endwert 4,364. Bei einem grossen Sprung ( $\theta_0 > 1$ ) durchläuft sie ein Minimum und erreicht z.B. bei  $\theta = 50$  nahezu den Kleinstwert 3,66, den Endwert von  $Nu$  für die Randbedingung  $\vartheta_w = \text{const}$ .

Hier überwiegt also am Rohranfang der Einfluss des Graetz-Nusselt-Problems. Die Grenze zwischen den beiden Fällen liegt nicht genau bei  $\theta_0 = 1$ , sondern etwas darunter. Mit steigendem  $\theta_0$  steigt auch die Einlauflänge, bei  $\theta_0 = \infty$  (Graetz-Nusselt-Problem) würde die Kurve für  $Nu$  genau den Endwert 3,66 erreichen und beibehalten.  $\theta_0$  kann auch negative Werte annehmen, dieser Bereich wurde von uns nicht untersucht.

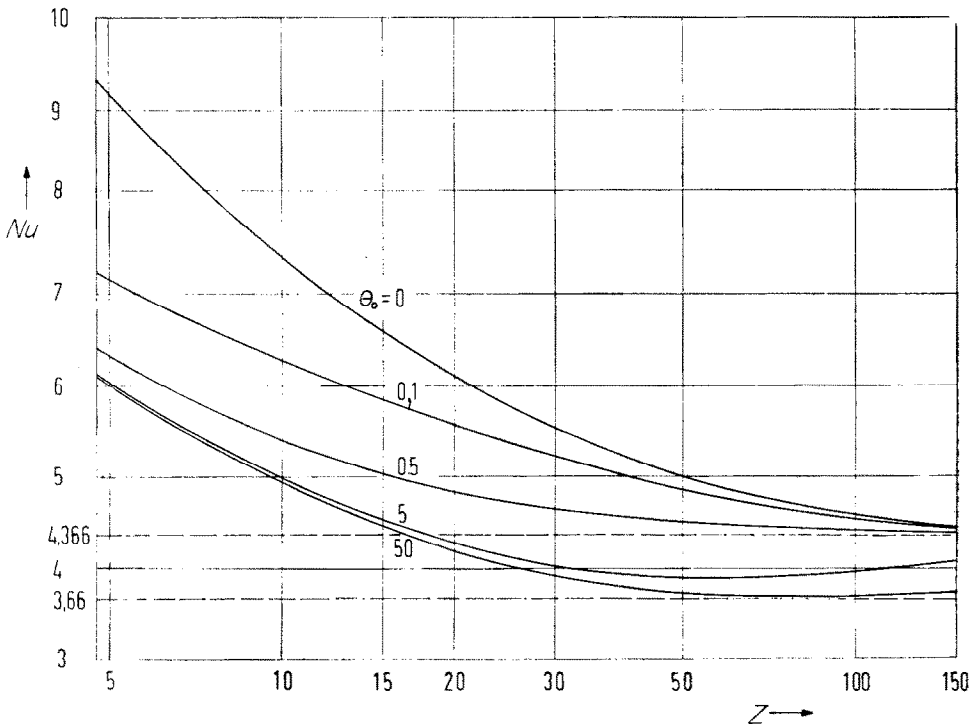


ABB. 8. Wandtemperatur linear mit der Rohrlänge ansteigend. Lokale Nusselt-Zahlen.

### NÄHERUNGSGLEICHUNGEN FÜR DIE NUSELT-ZAHLEN

Für den praktischen Gebrauch wurden für den Verlauf der Nusselt-Zahlen über der Rohrlänge Näherungsgleichungen aufgestellt, deren Ergebnisse für  $Z \geq 1$  nicht mehr als 0,5 Prozent von den mit dem Digitalrechner bestimmten Werten abweichen. Für die örtlichen Nusselt-Zahlen bewährte sich die Gleichung

$$Nu - Nu_{\infty} = \frac{b}{Z^n \exp(cZ)}$$

Darin ist  $Z = 10^3 x / (d \cdot Pe)$  die dimensionslose Rohrlänge. Die Konstanten sind in der folgenden Tabelle für zwei Randbedingungen zusammengestellt.

	$\vartheta_w = \text{const}$	$q_w = \text{const}$
$Nu_{\infty}$	3,655	4,364
$b$	6,874	8,68
$c$	0,0572	0,041
$n$	0,488	0,506

Die mittlere Nusselt-Zahl für die Randbedingung  $\vartheta_w = \text{const}$ , gebildet mit der logarithmischen mittleren Temperaturdifferenz nach Gl. (19) liess sich durch folgende Gleichung wiedergeben

$$Nu_m = 3,655 + \frac{42,1}{Z^{0,64}(69,0 + Z^{1,64})^{0,301}}$$

Auch hier sind für  $Z \geq 1$  die Abweichungen nicht grösser als 0,5 Prozent.

### LITERATURVERZEICHNIS

1. H. GRÖBER, S. ERK und U. GRIGULL, *Die Grundgesetze der Wärmeübertragung*, (3. Auflage, 3. Neu- druck). Springer, Berlin (1963).
2. W. M. KAYS, Numerical solutions for laminar-flow heat transfer in circular tubes, *Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs* **77**, 1265–1274 (1955).
3. L. COLLATZ, *Numerische Behandlung von Differential- gleichungen*, (2. Auflage), Springer, Berlin (1955).
4. G. O. BRIEN, M. A. HYMAN und S. KAPLAN, A study of the numerical solutions of partial differential equations, *J. Math. Phys.* **29**, 223–251 (1951).
5. M. A. HYMAN, On the numerical solution of partial differential equations, *Proefschrift Techn. Hogeschool*, S. 106. Delft (1953).
6. L. GRAETZ, Über die Wärmeleitfähigkeit von Flüssigkeiten, *Ann. Phys. (N.F.)* **18**, 79–94 (1883) und **25**, 337–357 (1885).
7. W. NUSELT, Die Abhängigkeit der Wärmeüber- gangszahl von der Rohrlänge, *Z. VDI* **54**, 1154–1158 (1910).
8. K. YAMAGATA, *Mem. Fac. Engr Kyushu Imp. Univ.* **8**, 365 (1936–40).
9. M. ABRAMOWITZ, National Bureau of Standards Report, No. 2030 (1952).
10. J. R. SELLARS, M. TRIBUS und J. S. KLEIN, Heat transfer to laminar flow in a round tube or flat conduit—The Graetz Problem extended, *Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs* **78**, 441–448 (1956).
11. A. EAGLE und R. M. FERGUSON, On the coefficient of heat transfer from the internal surface of tube walls, *Proc. Roy. Soc. (A)* **127**, 540–566 (1930).

**Abstract**—For constant wall-temperature, constant heat flux and a linear increasing wall-temperature the temperature profiles were numerically computed as a function of the tube length, with greater accuracy than achieved hitherto. For a few Nusselt numbers, approximation equations are presented.

For linear increasing wall-temperatures the Nusselt number passes a minimum.

**Résumé**—Les profils de température pour une température pariétale constante, un flux de chaleur constant et une température pariétale croissant linéairement ont été calculés numériquement en fonction de la longueur du tube, avec une plus grande précision que ce qui avait été fait auparavant. Des équations approchées ont été présentées pour quelques nombres de Nusselt. Pour des températures croissant linéairement, le nombre de Nusselt passe par un minimum.

**Аннотация**—Для постоянного значения температуры стенки, теплового потока и для линейно возрастающей температуры стенки дан численный расчет температурных профилей в зависимости от длины трубы. Точность расчета превышала известную до сих пор. Для нескольких значений критерия Нуссельта представлены приближенные уравнения. При линейно возрастающих значениях температуры стенки критерий Нуссельта имеет минимум.